TEMA 4

PROGRAMACIÓ DIDÀCTICA

CONTINGUTS	
Dimensió resolució de problemes	Funcions. Variables. Eixos de coordenades.
	Domini de definició d'una funció.
	Funcions contínues. Discontinuïtats.
	Creixement, màxims i mínims. Taxa de variació mitjana.
	Tendència i periodicitat d'una funció.
Dimensió raonament i prova	Interpretació de la representació gràfica de funcions.
	Interpretació de l'expressió analítica de funcions.
Dimensió connexions	Funcions aplicades a la vida quotidiana.
	Càlcul manual i mental.
Dimensió comunicació i representació	Representació de gràfiques de funcions i taules de valors.
	Expressió oral i escrita dels conceptes associats a les operacions algebraiques.
	Coneixement de l'ús de la calculadora i del paper mil·limetrat.

CRITERIS D'AVALUACIÓ	
Dimensió resolució de problemes	Resoldre problemes de la vida quotidiana utilitzant símbols i mètodes algebraics, i avaluar altres mètodes de resolució possibles com per exemple l'assaig error o bé el càlcul numèric amb mitjans tecnològics.
	Resoldre situacions en què cal identificar relacions quantitatives i determinar el tipus de funció que pot modelitzar-les.
	Saber interpretar la gràfica corresponent a una situació real.
	Reconèixer les característiques més rellevants d'una funció.
	Saber trobar la taxa de variació mitjana d'una funció en un interval.
Dimensió raonament i prova	Planificar i utilitzar processos de raonament i estratègies de resolució de problemes, tals com la realització de conjectures, la seva justificació i la generalització.
Dimensió connexions	Utilitzar models geomètrics per facilitar la comprensió de conceptes i propietats algebraics i per a la resolució de problemes en aquest context.
	Utilitzar models que facilitin la comprensió de conceptes i propietats per a la resolució de problemes en contextos d'altres disciplines. Emprar també relacions que afavoreixin l'anàlisi de situacions i el raonament.
Dimensió comunicació i representació	Expressar verbalment i per escrit amb precisió raonaments, relacions quantitatives i informacions que incorporin elements matemàtics, simbòlics o gràfics, valorant la utilitat del llenguatge matemàtic.

OBJECTIUS DE L'APRENENTATGE		
COMPETÈNCIES BÀSIQUES DE L'ÀMBIT MATEMÀTIC		
Dimensió resolució de problemes	C1	Interpretar la informació que aporta la gràfica d'una funció.
		Representar la gràfica d'una funció a partir d'un enunciat descriptiu i interpretar la informació que aporta.
		Elaborar una taula de valors a partir d'un enunciat descriptiu i representar la gràfica d'una funció.
	C2	Contestar preguntes a partir de l'anàlisi de gràfiques de funcions, enunciats descriptius o taules de valors.
	C3	Saber emprar diferents sistemes per resoldre problemes i per comprovar solucions.
		Revisar els procediments utilitzats i, si cal, rectificar-los.
		Recórrer al càlcul manual o al mental, segons que convingui.
	C4	Plantejar problemes senzills a partir de les dades d'un altre problema.
Dimensió raonament i prova	C5	Raonar si una funció o un tram d'una funció és d'un tipus o d'un altre i les característiques que presenta.
	C6	Utilitzar el treball amb funcions en situacions properes, com per exemple per treballar amb relacions entre nombres d'elements, temps, estatures, edats, preus, pesos, distàncies, velocitats, temperatures...
Dimensió connexions	C7	Saber trobar equivalències entre l'expressió analítica d'una funció, l'enunciat descriptiu, la taula de valors i la representació gràfica.
		Adonar-se que l'àrea i el volum de les figures geomètriques són funcions de les dimensions, i la fórmula corresponent, la seva expressió analítica.
	C8	Identificar l'aplicació del treball amb funcions en les ciències experimentals, en les ciències socials...
Dimensió comunicació i representació	C9	Saber interpretar la informació que aporta la gràfica d'una funció o una taula de valors.
		Saber representar gràfiques de funcions i taules de valors.
		Familiaritzar-se amb l'ús del paper mil·limetrat per dibuixar gràfiques.
	C10	Exposar, oralment o per escrit, les idees matemàtiques de manera entenedora emprant la terminologia adequada.
		Habituar-se a comprendre les idees matemàtiques expressades pels companys.
	C12	Emprar la calculadora per comprovar resultats obtinguts manualment.
		Utilitzar el programa GeoGebra per consolidar els coneixements apresos.
COMPETÈNCIES BÀSIQUES GENERALS		
CB1. Competència comunicativa, lingüística i audiovisual		Saber interpretar adequadament i amb la màxima precisió els enunciats dels problemes.
		Ser capaç d'expressar correctament les idees matemàtiques i d'explicar els procediments emprats per a la resolució dels problemes.
		Adquirir i usar el vocabulari específic adequat.
		Saber interpretar informació expressada en llenguatge gràfic.
CB3. Competència en el coneixement i la interacció amb el món físic		Valorar les matemàtiques com un mitjà per estudiar fets quotidians.
CB5. Competència digital		Utilitzar la calculadora com a ajut en els càlculs.
		Practicar amb el programa GeoGebra de geometria, àlgebra i càlcul.
CB7. Competència d'aprendre a aprendre		Saber millorar l'atenció, la concentració i la memòria.
		Obtenir informació i transformar-la en coneixement propi.
		Aplicar coneixements i destreses adquirits amb anterioritat en altres contextos.
CB8. Competència d'autonomia, iniciativa personal i emprenedoria		Mostrar iniciativa pròpia.
		Organitzar les tasques i els temps d'una manera adequada.

Notes

TEMA 4

FUNCIONS. CARACTERÍSTIQUES

El concepte de funció ha anat evolucionant i perfilant-se al llarg del temps. Quins requisits se li han anat exigint a aquest concepte?

- Una funció relaciona dues variables.
- Les funcions descriuen fenòmens naturals.
- Les relacions funcionals poden ser descrites mitjançant fórmules (relacions algebraiques).
- Les funcions poden ser representades gràficament.

Oresme (matemàtic francès del segle XIV) va afirmar l'any 1350 que les lleis de la natura són relacions de dependència entre «dues quantitats». Pot considerar-se una primera aproximació al concepte de funció.

Galileu (final del segle XVI) utilitza per primera vegada l'experimentació quantitativa (dissenya, experimenta, mesura i anota) per establir relacions numèriques que descriguin fenòmens naturals.

Descartes (segle XVII), amb la seva algebrització de la geometria, propicia que les funcions puguin ser representades gràficament.

Leibniz, el 1673, fa servir per primera vegada la paraula *funció* per anomenar aquestes relacions.

Euler, entre 1748 i 1755, va anar perfilant el concepte, al qual va donar precisió i generalitat, admetent, finalment, que una relació entre dues variables pot ser funció encara que no hi hagi una expressió analítica que la descrigui. El mateix Euler va ser qui va aportar la nomenclatura $f(x)$.

84

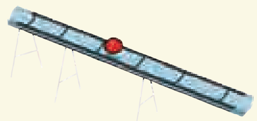
El concepte de funció, perfectament perfilat, que aportem als nostres estudiants en els manuals escolars és el resultat d'un llarg procés del qual descrivim en aquesta lectura les fites més rellevants.

Abans de començar, utilitza el que ja saps

A quina velocitat cauen els objectes?

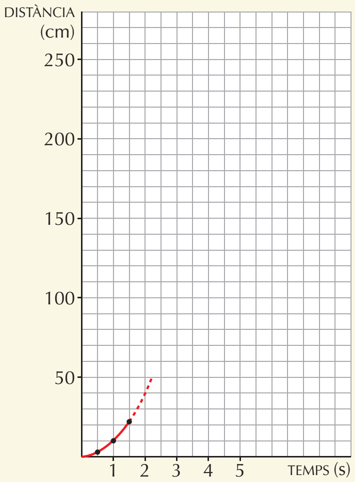
En l'Europa del segle XVI, la influència de les idees d'Aristòtil (filòsof del segle IV aC) era extraordinària i les seves creences no es qüestionaven. Segons Aristòtil, si es deixen caure dos cossos de diferents pesos, el més pesat arribarà abans a terra. Es diu que Galileu, essent professor novell de la Universitat de Pisa, va desmuntar aquesta creença mitjançant una experiència pública: va deixar caure dos objectes metàl·lics de pesos molt diferents des del capdamunt de la torre de Pisa. Van caure simultàniament. D'aquesta manera va demostrar la seva tesi però va ser expulsat de la universitat.

És possible que en l'anècdota anterior hi hagi molt de mite. No obstant això, sí que és cert que va dur a terme experiències semblants a la que s'exposa a continuació.



- Deixa caure una bola per un rail lleument inclinat i mesura la distància que recorre en diferents temps:

Temps en s (t)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Distància en cm (e)	0	2,5	10	22	40	63	90	123	160	202	250



a) Representa, en el quadern, les dades anteriors sobre una quadrícula com la que es proposa. Fes-les servir per obtenir la corba corresponent.

b) Comprova que els valors obtinguts responen (amb molt bona aproximació) a la relació següent:

$$e = 10t^2$$

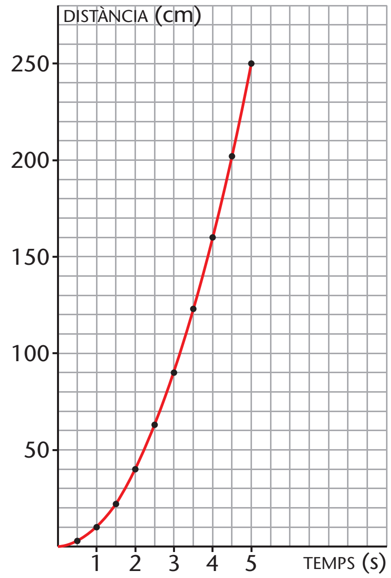
Hauràs de recordar

- Com es representen i s'interpreten funcions descrites mitjançant enunciats.
- Què és i com s'obté el pendent d'un segment.

www1. Alguns continguts estan desenvolupats en www.espaibarcanova.cat, juntament amb algunes activitats per posar-los en pràctica.

SOLUCIONS

A quina velocitat cauen els objectes?



Notes

Abans de començar

Un curiós complement històric serveix d'introducció a una proposta per als estudiants: la representació d'una funció a partir d'unes dades suposadament experimentals i la comprovació que poden respondre a una certa expressió analítica.

Hauràs de recordar

El web www.espaibarcanova.cat ofereix recursos amb què activar coneixements previs i repassar continguts bàsics imprescindibles per abordar amb èxit l'estudi de la unitat.

Es recorden els conceptes i procediments següents:

- Com es representen i s'interpreten funcions descrites mitjançant enunciats.
- Què és i com s'obté el pendent d'un segment.

CONEIXEMENTS MÍNIMS

- Conèixer el concepte de funció i saber explicar-lo.
- Conèixer i diferenciar els conceptes de variable dependent i variable independent.
- Conèixer els conceptes de domini de definició i recorregut.

COMPLEMENTS IMPORTANTS

- Saber reconèixer la gràfica d'una funció.

SOLUCIONS

4.1. a) Variable independent → temps (min);
Variable dependent → temperatura (°C)

b) Per a cada valor del temps hi ha un únic valor de temperatura.

c) Domini = [0, 6];
Recorregut = [10, 58]

4.2. La gràfica de l'esquerra és una funció: a cada valor de x correspon un únic valor de y.

La gràfica de la dreta no és funció: hi ha valors de x als quals corresponen 2 o 3 valors de y.

Notes

1. Conceptes bàsics

Una funció lliga dues variables numèriques que, habitualment, s'anomenen x i y:

x és la **variable independent** y és la **variable dependent**

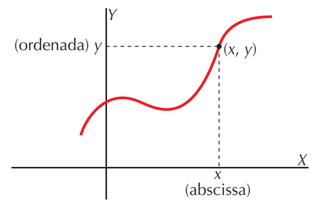
La funció, que se sol denotar per $y = f(x)$, associa a cada valor de x **un únic** valor de y:

$$x \rightarrow y = f(x)$$

Per visualitzar el comportament d'una funció, recorrem a la seva representació gràfica: sobre uns eixos cartesians amb sengles escales, representem les dues variables:

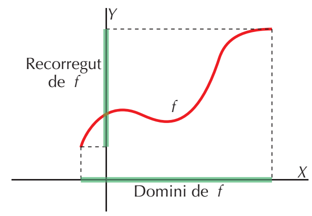
La x sobre l'eix horitzontal (eix d'**abscisses**).
La y sobre l'eix vertical (eix d'**ordenades**).

Cada punt de la gràfica té dues **coordenades**, la seva abscissa, x, i la seva ordenada, y.



S'anomena **domini de definició** d'una funció, f, i s'escriu *Dom f*, el conjunt de valors de x per als quals hi ha la funció.

S'anomena **recorregut** de f el conjunt de valors que pren la funció. És a dir, el conjunt de valors de y per als quals hi ha un x tal que $f(x) = y$.



ACTIVITAT RESOLTA

Explica per què és funció la relació descrita en l'activitat de la pàgina anterior. Quines són les variables? Quins són el domini de definició i el recorregut?

En l'activitat de la pàgina 85 es lliguen dues variables: el *temps*, t, mesurat en segons, i l'*espai recorregut*, e, mesurat en centímetres.

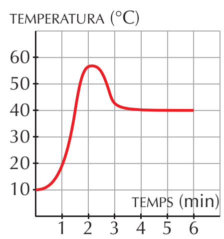
La primera és la variable independent. La segona és la variable dependent.

Per a cada valor de t hi ha un únic valor de e. Per tant, e és una funció que depèn de t; és a dir $e = f(t)$.

El *domini de definició* és l'interval [0, 5]. El *recorregut* és l'interval [0, 250].

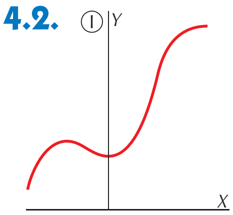
ACTIVITATS

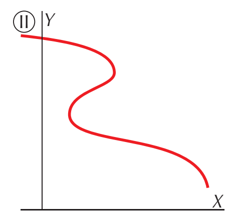
4.1. La gràfica descriu la temperatura a què surt l'aigua d'una aixeta que està una estona oberta.



a) Quines són les dues variables?
b) Explica per què és una funció.
c) Quins són el domini de definició i el recorregut?

4.2.





Una d'aquestes dues gràfiques correspon a una funció, i l'altra, no. Identifica-les, raonadament.

Es defineixen amb un cert rigor els conceptes associats a una funció: variable dependent i independent, eix d'abscisses i eix d'ordenades, coordenades d'un punt.

La presentació de dues gràfiques, una de corresponent a una funció i l'altra no, té un doble objectiu: d'una banda, saber reconèixer l'ordenada d'un punt per a una abscissa donada; i, d'una altra, recordar el concepte de funció: «a cada valor de x li correspon un únic valor de y».

Convé atreure l'atenció de l'alumne sobre la importància d'emprar la terminologia adequada que es destaca en aquesta pàgina.

2. Com es presenten les funcions

En estudiar tant matemàtiques com altres ciències o en la vida quotidiana, ens trobem sovint amb funcions.

Les funcions ens vénen donades de moltes maneres diferents: mitjançant la seva *gràfica*, per una *taula de valors*, per una *fórmula* o mitjançant una *descripció verbal (enunciat)*.

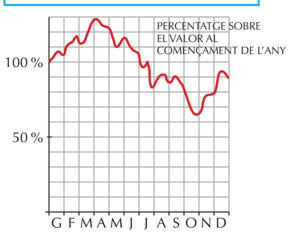
2.1. Mitjançant la seva expressió gràfica

Les dues funcions següents vénen donades per les seves representacions gràfiques:

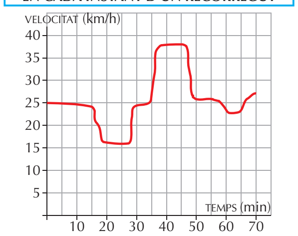
Observa

La gràfica d'una funció permet apreciar-ne el comportament global al primer cop d'ull.

ÍNDEX DE LA BORSA EN UN ANY



VELOCITAT D'UN CICLISTA EN CADA INSTANT D'UN RECORREGUT



Com millor es pot apreciar el comportament global d'una funció és mitjançant la seva **representació gràfica**. Per això, sempre que pretenguem analitzar una funció, intentarem representar-la gràficament, sigui quina sigui la forma en la qual, en principi, ens vingui donada.

2.2. Mitjançant un enunciat

Quan una funció ve donada per un enunciat o una descripció, la idea que ens en podem fer és, quasi sempre, quantitativament poc precisa. Però si l'enunciat s'acompanya amb dades numèriques, la funció pot quedar perfectament determinada.

ACTIVITATS

4.3. Analitzarem la gràfica de l'índex borsari:

a) Et sembla raonable que la gràfica arrenqui exactament del valor 100?

b) El màxim anual ha estat del 128 %. En quin moment ha ocorregut? Contesta aproximadament.

c) Quin ha estat el mínim anual? En quin moment ha ocorregut?

d) Quin ha estat el valor de la borsa a final d'any?

4.4. Analitzarem la gràfica del ciclista:

a) Quant temps tarda a fer el recorregut?

b) En els primers 15 minuts circula en pla. A quina velocitat ho fa? Quina distància recorre?

c) Entre els 18 i els 27 minuts va en pujada. Digues a quina velocitat.

d) Assenyala un interval de 5 minuts en què va en baixada. A quina velocitat ho fa?

CONEIXEMENTS MÍNIMS

- Conèixer les maneres de presentar les funcions.
- Saber interpretar la gràfica d'una funció.

COMPLEMENTS IMPORTANTS

- Saber interpretar l'enunciat que descriu una funció i saber representar-la gràficament.

SOLUCIONS

4.3. a) Sí. La gràfica marca el «percentatge sobre el valor al començament de l'any», i al començament de l'any ha d'estar al 100 %.

b) En el començament del mes d'abril.

c) El mínim anual va ser del 65 %, aproximadament. Va ocórrer a finals del mes d'octubre.

d) A final d'any el valor era d'un 90 %.

4.4. a) 70 minuts = 1 h 10 min

b) Encara que al final d'aquests 15 minuts la velocitat decau una mica, considerarem que va, durant tot aquest temps, a 25 km/h. En aquests 15 minuts recorre:

$$\frac{25}{4}\ \text{km} = 6{,}25\ \text{km}$$

c) Al voltant del minut 15, quan la velocitat és una mica menor de 25 km/h, comença una pujada. La velocitat va descendint fins a arribar, aproximadament, a uns 16 km/h, la més baixa, velocitat que manté entre el minut 18 i el 27.

d) Entre els minuts 35 i 40 comença a una velocitat de 25 km/h i acaba a 38 km/h.

Es mostren els diferents modes d'expressar una funció, i es completa l'estudi de la pàgina inicial.

Convé que entenguin que la representació gràfica és la forma més adequada per fer una anàlisi ràpida del comportament d'una funció, mentre que si es volen obtenir resultats precisos i manipular-los quantitativament, cal recórrer a l'expressió analítica.

Les activitats proposades al final de cada pàgina poden ser útils per explorar fins a quin punt els estudiants saben extreure informació de cada gràfica, associar a aquesta gràfica un enunciat o representar una funció donada mitjançant una fórmula. En general, es buca que els estudiants, tenint en compte el context del problema, estimin la forma més adequada per fer l'estudi d'una funció.

CONEIXEMENTS MÍNIMS

- Saber interpretar una funció mitjançant les dades d'una taula de valors.

SOLUCIONS

4.5. a) 375 €; b) 2.760 €; c) 6.080 €; d) 34.910 €

Notes

2.3. Mitjançant una taula de valors

Ben sovint se'ns donen els valors d'una funció mitjançant una taula en la qual s'obtenen directament les dades cercades. No obstant això, en altres casos, com en la taula següent, cal fer càlculs complexos per obtenir allò que se cerca.

Aquesta taula de valors permet calcular el que cada persona ha de pagar a Hisenda un any determinat (quota íntegra) en funció del que guanya (base liquidable).

Base liquidable fins (...) euros	Quota íntegra	Resta base liquidable fins (...) euros	Tipus aplicable (%)
0 €	0 €	4.000 €	15
4.000 €	600 €	10.000 €	25
14.000 €	3.000 €	12.000 €	28
26.000 €	6.360 €	20.000 €	37
46.000 €	13.760 €	en endavant	45

Exemple

Algú que guanyi 32.500 €:

- Se situa en la 4a fila.
- Pels primers 26.000 € paga 6.360 €, i per la resta, el 37 %:
  32.500 – 26.000 = 6.500 €
  37 % de 6.500 =
  = 6.500 × 0,37 = 2.405 €

Per tant, paga 6.500 + 2.405. És a dir, si guanya 32.500 €, ha de pagar 8.905 €.

ACTIVITAT RESOLTA

Obtén la quota que correspon a cada una de les bases liquidables següents:

a) 3.278 €

Aquesta quantitat correspon a la primera línia: 15 % de 3.278 = 3.278 · 0,15 = 491,70 → Quota: 491,70 €

b) 14.000 €

La quota corresponent a aquesta quantitat es troba directament, sense càlculs, en la fila 3a → Quota: 3.000 €

c) 41.293,85 €

Ens situem en la 4a fila: 41.293,85 – 26.000 = 15.293,85

26.000 ⟶ **6.360**

37 % de 15.293,85 = **5.658,72**

Quota corresponent a 41.293,85 €: 6.360 + 5.658,72 = **12.018,72 €**

d) 80.000 €

Ens situem en la 5a fila: 80.000 – 46.000 = 34.000

46.000 ⟶ **13.760**

45 % de 34.000 = **15.300**

Quota corresponent a 80.000 €: 13.760 + 15.300 = **29.060 €**

ACTIVITATS

4.5. Troba la quota que correspon a cada una de les bases liquidables següents:

a) 2.500 € **b)** 12 .640 € **c)** 25.000 € **d)** 93.000 €

BARCANOVA

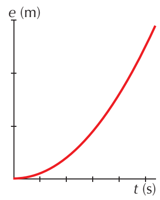
BARCANOVA

2.4. Mitjançant la seva expressió analítica o fórmula

L'**expressió analítica** és la forma més precisa i operativa de donar una funció. Però requereix un minuciós estudi posterior.

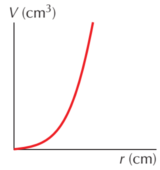
EXEMPLE 1
Una bola que es deixa caure per un pla lleument inclinat porta una acceleració de 0,2 m/s^2.

La distància, e (en m), que recorre en funció del temps, t (en s), ve donada per la fórmula $e = 0{,}1t^2$

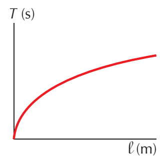


EXEMPLE 2
El volum d'una esfera en funció del seu radi és:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (r \text{ en cm, } V \text{ en cm}^3)$$



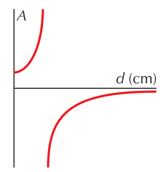
EXEMPLE 3
El període, T, d'un pèndol és el temps (en s), que tarda a fer una oscil·lació completa, anada i tornada. Ve donat en funció de la seva longitud, ℓ (en m), per la fórmula $T = \sqrt{4\ell}$



EXEMPLE 4
L'augment, A, de la grandària d'un objecte que es mira a través d'una lupa és $A = \dfrac{2}{2-d}$

d: distància de la lupa a l'objecte, en cm.

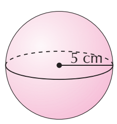
A: augment (nombre pel qual es multiplica la grandària).

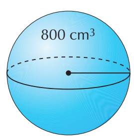


ACTIVITATS

4.6. En l'EXEMPLE 1, calcula la distància que recorre la bola en 1, 2, 3, 4 i 5 segons. A quin temps correspon una distància de 2 m?

4.7. En l'EXEMPLE 2, troba el volum d'una esfera de radi 5 cm i el radi d'una esfera de volum 800 cm^3.





GeoGebra

4.8. Troba (EXEMPLE 3) el període d'un pèndol d'1 m de llarg. És diu que aquest pèndol «bat segons». És raonable l'expressió?

4.9. Calcula la grandària aparent, A, d'un objecte (EXEMPLE 4) per als valors següents de d:

0; 0,5; 1; 1,5; 1,9; 1,99

Per a $d = 4$ s'obté $A = -1$. Això significa que l'objecte es veu de la mateixa grandària, però invertit. Interpreta els valors de A per a d:

10; 5; 2,5; 2,1; 2,01

CONEIXEMENTS MÍNIMS

- Saber que l'expressió analítica és la forma més precisa de donar una funció.
- Saber interpretar una funció mitjançant una fórmula o expressió analítica.

SOLUCIONS

4.6.

t (s)	1	2	3	4	5
e (m)	0,1	0,4	0,9	1,6	2,5

Perquè $e = 2$ m, és necessari un temps de $t \approx 4{,}47$ s.

4.7. $V \approx 523{,}6$ cm^3; $r \approx 5{,}76$ cm

4.8. $T = 2$ s

L'expressió «bat segons» és raonable: en cada oscil·lació, fa l'anada en 1 segon i la tornada en un altre segon.

4.9.

d	0	0,5	1	1,5	1,9	1,99
A	1	4/3	2	4	20	200

d	10	5	2,5	2,1	2,01
A	–1/4	–2/3	–4	–20	–200

En els casos en què A és negatiu, l'objecte es veu a la mida que indica el valor de A, però invertit.

GeoGebra

Notes

CONEIXEMENTS MÍNIMS

- Saber trobar el domini de definició d'una funció donada gràficament o mitjançant una expressió analítica senzilla.

SOLUCIONS

4.10. a) $\mathbb{R} - \{-4, 2\} =$
$= (-\infty, -4) \cup (-4, 2) \cup (2, +\infty)$

b) $[5, +\infty)$

c) $(5, +\infty)$

www2. Reforç. Càlcul de dominis de definició.

www3. Ampliació. Càlcul de dominis de definició.

Notes

3. Domini de definició i expressió analítica

En la funció $y = x^2$ podem donar a x un valor qualsevol i obtindrem el valor corresponent de y. Diem que aquesta funció **és definida en tot** $\mathbb{R}$ o bé que el seu **domini de definició és** $\mathbb{R}$ o $(-\infty, +\infty)$.

No obstant això, en la funció $y = \sqrt{x}$ no podem donar a x valors negatius. El seu domini de definició és $[0, +\infty)$.

El domini de definició d'una funció, *Dom f*, pot quedar restringit per una de les causes següents:

- *Impossibilitat de fer alguna operació.* Això passa si en $f(x)$ hi ha:
  - *Denominadors.* Els valors que fan zero un denominador no són en el domini de definició.

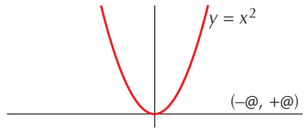
    Per exemple, per a $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$, el domini és el conjunt de tots els reals excepte $x = -3$. És a dir, $Dom\ f = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$.
  - *Arrels quadrades.* No són en el domini de definició els valors que fan que l'expressió sota l'arrel sigui negativa.

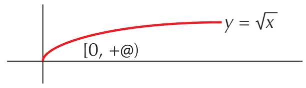
    Per exemple, per a $f(x) = \sqrt{x-2}$, els valors $x < 2$ no són en el domini de definició. Per tant, $Dom\ f = [2, +\infty)$.
- *Context real del qual s'ha extret la funció.*

  Per exemple, si $A = c^2$ representa l'àrea d'un quadrat en funció del seu costat, el domini és $(0, +\infty)$, perquè la longitud del costat ha de ser un nombre positiu.
- *Voluntat de qui proposa la funció.*

  Així, podem referir-nos a la funció $y = 2x$ definida en $(0, 4]$ sense més raó que el fet que vulguem fer-ho.

Quan no es diu el contrari, el domini de definició és tan ampli com permeten les operacions que componen l'expressió analítica de la funció.





Restriccions

No pertanyen al domini de definició:

- Els valors que anul·len el denominador.
- Els valors que fan negatiu el radicand de les arrels quadrades.

RECORDA

$(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$ significa tots els punts de $(-\infty, -3)$ i tots els punts de $(-3, +\infty)$.

ACTIVITAT RESOLTA

Troba el domini de definició de:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 8}$ $\quad x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

Els valors $x = -2$ i $x = 4$ anul·len el denominador, per la qual cosa no pertanyen al domini de definició. Per tant, $Dom\ f = (-\infty, -2) \cup (-2, 4) \cup (4, +\infty)$.

b) $y = \sqrt{x+5}$ $\quad x + 5 \geq 0 \rightarrow x \geq -5$. El domini de definició és $Dom\ f = [-5, +\infty)$.

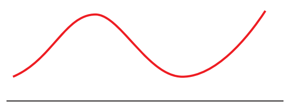
ACTIVITATS

4.10. Troba el domini de definició de: **a)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 8}$ **b)** $y = \sqrt{x-5}$ **c)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-5}}$

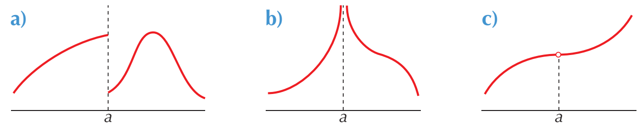
www2. Reforç. Càlcul de dominis de definició.
www3. Ampliació. Càlcul de dominis de definició.

A les funcions donades gràficament és molt fàcil assignar-los el seu domini de definició. Però quan són donades per l'expressió analítica, el seu domini depèn de la validesa de les operacions implícites en la fórmula segons el valor que prengui la variable. Això és el que s'analitza en aquest apartat.

4. Funcions contínues. Discontinuïtats



FUNCIÓ CONTÍNUA



La funció del marge és contínua en tot el seu domini de definició.

Les altres tres són discontínues per diferents motius:

a) Presenta un salt en el punt d'abscissa a.

b) Té branques infinites en el punt a. És a dir, els valors de la funció creixen indefinidament quan la x s'aproxima a a.

c) Li falta un punt. És a dir, no és definida en $x = a$.

Tingues en compte

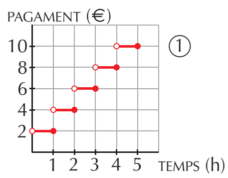
L'interval en el qual es defineix una funció contínua pot ser tancat, obert o semiobert.

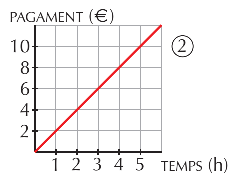
Una funció és **contínua** quan no presenta discontinuïtats de cap tipus.

Una funció és **contínua en un interval** $[a, b]$ si no hi presenta cap discontinuïtat.

EXEMPLES

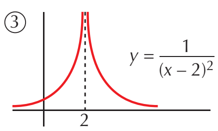
- Molts aparcaments cobren «per hores». Això vol dir que només per entrar ja es paga 1 h. Si s'hi està 1 h i 10 min es paguen 2 h. La primera de les dues gràfiques següents descriu aquesta forma de pagament. És una funció amb diversos punts de discontinuïtat per salts.



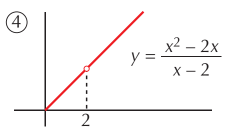


Els usuaris prefereixen que les tarifes es regeixin per la funció la gràfica de la qual és la ②. Evidentment, és contínua.

- Les dues funcions següents presenten exemples de discontinuïtat:



Té branques infinites



Li falta un punt.

Observació important

En una funció contínua, a «variacions petites» de la x corresponen variacions també «petites» de la y.

En una funció discontínua, en els punts de discontinuïtat (salts) una variació petita de la x (un minut més en l'aparcament) pot produir una variació gran en la y (2 €).

ACTIVITATS

4.11. Construeix una funció semblant a la ①, però per al cas que es pagui 1 euro cada mitja hora. Quina de les dues opcions et sembla més justa?

4.12. Analitza la funció ③ per a valors «pròxims a 2». Comprova que quan x val 1,9; 1,99; 1,999; 2,01; 2,001, la y pren valors «molt grans».

CONEIXEMENTS MÍNIMS

- Conèixer el concepte de funció contínua i, per oposició, de funció discontínua.

COMPLEMENTS IMPORTANTS

- Saber que l'interval en què es defineix una funció contínua pot ser obert o semiobert.

SOLUCIONS

4.11. Aquesta opció de pagament és més justa que la de l'exemple.

4.12.

x	1,9	1,99	1,999	2,01	2,001
y	100	10^4	10^6	10^4	10^6

Notes

La idea de funció contínua com aquella la gràfica de la qual es pot traçar sense alçar el llapis del paper és una cosa que l'alumnat ja té assimilada.

No obstant això, val la pena recordar la discontinuïtat que es produeix pel simple fet de treballar amb una variable discreta, definida només per a valors aïllats: «aparells venuts – guanys obtinguts», «fotocòpies realitzades – preu», «persones que treballen en una obra – temps per acabar l'obra»... són exemples de funcions on els punts no es poden unir.

En aquest curs seria convenient que s'analitzés formalment el concepte de funció contínua, així com les raons per les quals deixa de ser-ho. Després d'analitzar els exemples proposats en aquesta pàgina, es podria esperar que es diferenciessin els dos tipus de discontinuïtat que es poden donar en funcions definides analíticament:

- Funcions que són expressades com a quocient de polinomis.
- Funcions definides a trossos.

És de gran utilitat proposar activitats de funcions definides a trossos, discontínues i analitzar la manera d'aconseguir que siguin contínues. Per exemple:

$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ és discontínua en $x = 0$.

Agafant $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

la funció és contínua en tot el seu domini.

CONEIXEMENTS MÍNIMS

- Saber quan una funció és creixent i quan decreixent i en quins intervals.
- Reconèixer el màxim relatiu en una funció creixent.
- Reconèixer el mínim relatiu en una funció decreixent.

SOLUCIONS

4.13. a) Creix en $(-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$.
Decreix en $(-\infty, -5) \cup (-3, 5)$.

b) Màxim relatiu en el punt $(-3, 5)$.
Mínims relatius en els punts $(-5, 3)$ i $(5, -2)$.

Notes

5. Creixement, màxims i mínims

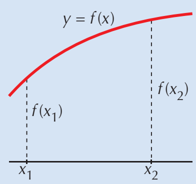
La funció f és **creixent** en aquest tram perquè

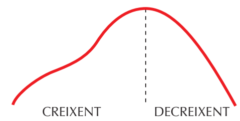
si $x_1 < x_2$, aleshores $f(x_1) < f(x_2)$.

Anàlogament, una funció és **decreixent** en un interval quan

si $x_1 < x_2$, aleshores $f(x_1) > f(x_2)$.

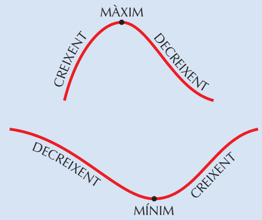
La mateixa funció pot ser creixent en uns intervals i decreixent en uns altres.

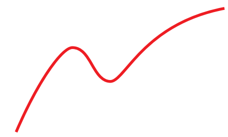




Una funció té un **màxim relatiu** en un punt quan la funció hi pren un valor més gran que en els punts pròxims. En aquest cas, la funció és creixent fins al màxim i decreixent a partir d'aquest.

Anàlogament, si f té un **mínim relatiu** en un punt, és decreixent abans del punt i creixent a partir d'aquest.

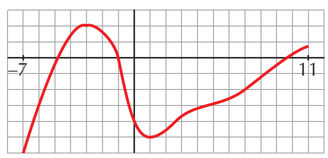




La funció pot prendre en altres punts valors més grans que un màxim relatiu i més petits que un mínim relatiu.

Activitat resolta

Digues en quins intervals és creixent i en quins és decreixent la funció donada gràficament a la dreta. Quins en són els màxims i els mínims relatius?



La funció està definida entre -7 i 11.

És creixent en els intervals $(-7, -3)$ i $(1, 11)$.

És decreixent en l'interval $(-3, 1)$.

Té un màxim relatiu en el punt d'abscissa -3. El seu valor és 2.

Té un mínim relatiu en el punt d'abscissa 1. El seu valor és -5.

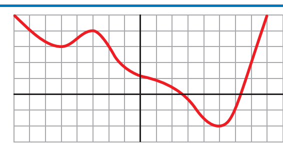
Hi ha punts en què la funció pren valors més petits que en el mínim relatiu. Per exemple, per a $x = -7$, la funció pren el valor -6.

ACTIVITATS

4.13. De la funció de la dreta, indica:

a) En quins intervals és creixent i en quins és decreixent.

b) Quins en són els màxims i els mínims relatius.



El significat i l'anàlisi en un context del creixement i decreixement d'una funció, així com el reconeixement dels punts de màxim o mínim, no solen presentar dificultats per a l'alumnat.

Atès que el concepte i la notació d'interval i semirecta ja són coneguts, caldria exigir-ne l'ús per expressar els intervals on la funció creix o decreix.

A l'hora de parlar de màxims i de mínims, seria convenient insistir en dos aspectes:

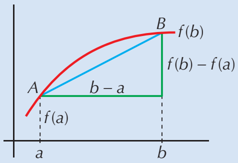
- El significat de la paraula *relatiu*: prop d'aquest punt de màxim (o mínim) no hi ha més punts que estiguin per sobre (o per sota).
- Per indicar el màxim o el mínim han d'expressar en quin punt de l'eix X s'aconsegueix, així com el valor que pren: «s'aconsegueix en el punt d'abscissa -2 i el seu valor és 3, la qual cosa equival a dir que s'aconsegueix en el punt $(-2, 3)$».

5.1. Taxa de variació mitjana (TVM)

Per mesurar la variació (augment o disminució) d'una funció en un interval, s'utilitza la **taxa de variació mitjana**.

Observa

La TVM d'una funció en un interval és la «mitjana» de la variació de la funció en l'interval: *quant varia en relació amb la longitud de l'interval.*



S'anomena taxa de variació mitjana de la funció f en l'interval $[a, b]$ el quocient entre la variació de la funció i la longitud de l'interval.

$$\text{TVM de } f \text{ en } [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Observa que la TVM de f en $[a, b]$ és el pendent del segment AB.

La velocitat mitjana d'un mòbil en un interval de temps (distància recorreguda/temps transcorregut) és un cas particular de TVM.

ACTIVITATS RESOLTES

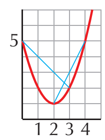
1. Troba la taxa de variació mitjana (TVM) de la funció donada gràficament a la dreta en els intervals [1, 5] i [5, 8].

En la figura observem que: $f(1) = 6$, $f(5) = 9$, $f(8) = 3$. Per tant:

$$\text{TVM de } f \text{ en } [1, 5] = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{9 - 6}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{TVM de } f \text{ en } [5, 8] = \frac{f(8) - f(5)}{8 - 5} = \frac{3 - 9}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

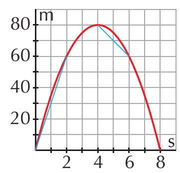
2. Troba la TVM de la funció $y = x^2 - 4x + 5$ en els intervals [2, 4] i [0, 3].



$$\text{TVM en } [2, 4] = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{5 - 1}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{TVM en } [0, 3] = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{2 - 5}{3 - 0} = \frac{-3}{3} = -1$$

3. L'altura d'una pedra llançada cap amunt ve donada per l'equació $e = 40t - 5t^2$. Troba la seva velocitat mitjana en els intervals [0, 2] i [4, 6].



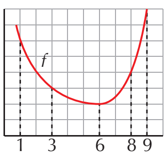
$$\text{TVM en } [0, 2] = \frac{e(2) - e(0)}{2 - 0} = \frac{60 - 0}{2} = 30 \text{ m/s}$$

$$\text{TVM en } [4, 6] = \frac{e(6) - e(4)}{6 - 4} = \frac{60 - 80}{2} = -10 \text{ m/s}$$

La velocitat es considera positiva quan la pedra puja i negativa quan la pedra baixa.

ACTIVITATS

4.14. Troba la taxa de variació mitjana (TVM) de la funció f representada, en els intervals [1, 3], [3, 6], [6, 8], [8, 9] i [3, 9].



GeoGebra

4.15. Troba la TVM de la funció $y = x^2 - 4x + 5$ (ACTIVITAT RESOLTA 2) en [0, 2], [1, 3] i [1, 4].

4.16. Troba la velocitat mitjana de la pedra de l'ACTIVITAT RESOLTA 3 en els intervals [0, 1], [0, 3], [3, 4] i [4, 8].

93

La taxa de variació mitjana és el primer pas per mesurar el creixement d'una funció en un interval. Aquest concepte es reforçarà en el curs pròxim com a pas previ a l'estudi de la derivada.

És desitjable que els estudiants calculin la TVM en funcions donades gràficament i en funcions donades analíticament.

Si el professor o la professora ho creu convenient, es podria fer algun pas d'aproximació al creixement en un punt agafant intervals molt petits, amb l'ajuda de la calculadora. Aquesta activitat pot ser opcional per a alumnes especialment interessats.

CONEIXEMENTS MÍNIMS

- Conèixer el concepte de taxa de variació mitjana (TVM).
- Saber calcular la taxa de variació mitjana d'una funció en un interval.

SOLUCIONS

4.14. TVM [1, 3] = –3/2
TVM [3, 6] = –1/3
TVM [6, 8] = 1
TVM [8, 9] = 4
TVM [3, 9] = 5/6

4.15. TVM [0, 2] = –2
TVM [1, 3] = 0
TVM [1, 4] = 1

4.16. TVM [0, 1] = 35
TVM [0, 3] = 25
TVM [3, 4] = 5
TVM [4, 8] = –20

GeoGebra

Notes

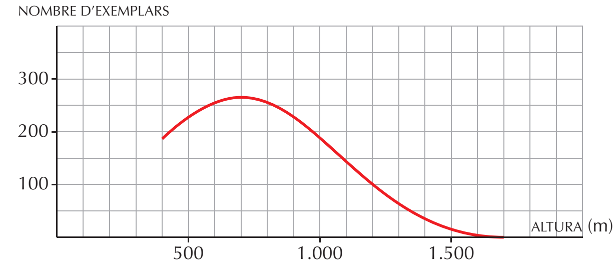
CONEIXEMENTS MÍNIMS

- Conèixer i saber explicar els conceptes de tendència i periodicitat d'una funció.

Notes

6. Tendència i periodicitat

En una comarca es troba ben sovint una espècie determinada de planta. S'ha estudiat la *quantitat mitjana d'exemplars per hectàrea* que hi ha a diferents *altures*. El resultat es dóna en la gràfica següent:



Observem que, a partir d'una certa altura, com més es puja menys exemplars se'n troben. I que, a partir de 1.600 m, quasi no hi ha plantes d'aquest tipus. Podem afirmar que:

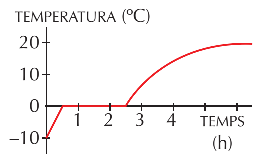
Quan l'altura augmenta per damunt dels 1.600 m, el nombre de plantes tendeix a zero.

Hi ha funcions en què, encara que només en coneguem un tros, podem predir com es comportaran lluny de l'interval en què s'han estudiat, perquè tenen **branques** amb una **tendència** molt clara.

ACTIVITATS RESOLTES

1. En netejar el congelador, ha quedat, en un got, un tros de gel. Fes una gràfica amb la variació de la temperatura d'aquesta aigua sabent que el gel surt del congelador a –10 °C, tarda 1/2 h a posar-se a 0 °C i 2 h més a descongelar-se. La temperatura exterior és de 20 °C.

El gel es descongela mantenint la temperatura de 0 °C fins que s'ha liquat tot. A partir d'aquí, puja la temperatura de l'aigua que *tendeix* a igualar-se amb la de l'habitació on es troba.

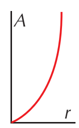


2. A quant tendeix l'àrea d'un cercle quan el radi creix?

L'àrea del cercle, en funció del seu radi, és $A = \pi r^2$. Com més gran sigui el radi, més gran serà l'àrea. És a dir, l'àrea creix indefinidament.

Això s'expressa de la manera següent:

Quan el radi creix, l'àrea *tendeix a infinit*.



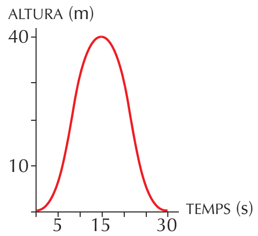
Més enllà del tram representat en la gràfica es pretén que l'alumnat aconsegueixi reconèixer i descriure formalment el comportament d'una funció a mesura que augmenten els valors de la variable independent. La descripció s'ha de fer verbalment tenint en compte el significat de les variables que intervenen en la funció.

Reconèixer una funció periòdica observant la gràfica no suposa cap esforç; en aquest nivell, sí que seria interessant proposar activitats en què es demani identificar el període, completar la gràfica o calcular el valor de la funció en un punt x_0 qualsevol.

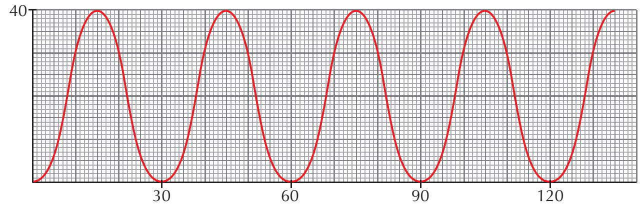
Si el professor o la professora ho creu convenient, pot acabar aquest epígraf presentant exemples de funcions periòdiques que apareixen en la vida real:

- La intensitat de les taques solars aconsegueix un màxim cada 11 anys.
- L'activitat elèctrica del cervell es pot mesurar i dóna lloc a un encefalograma la gràfica de la qual és aproximadament periòdica.
- Distància al Sol del planeta Mercuri, sabent que la seva òrbita es repeteix una vegada i una altra cada 88 dies.

6.1. Periodicitat

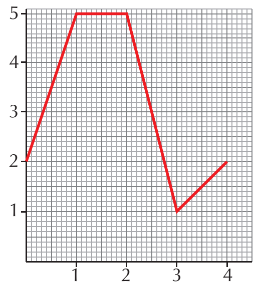


En el marge s'ha representat la variació de l'altura d'un catúfol d'una sínia quan aquesta fa una volta. Tarda 30 segons, i en aquest temps puja, arriba al punt més alt, baixa i arriba al terra. Però aquest moviment es repeteix una vegada i una altra. La seva representació gràfica és aquesta:



En aquesta funció, el que passa en l'interval [0, 30] es repeteix reiteradament. Es tracta d'una *funció periòdica* de *període* 30.

Funció periòdica és aquella el comportament de la qual es repeteix cada vegada que la variable independent recorre un interval determinat. La longitud d'aquest interval s'anomena **període**.



ACTIVITAT RESOLTA

En el marge està representat el començament d'una funció periòdica de període 4. Esbrina els valors d'aquesta funció en aquests punts d'abscissa:

$\boldsymbol{a = 9} \rightarrow f(9) = f(1) = 5$ (perquè $9 = 2 \cdot 4 + 1$, i cada 4 unitats es repeteix)

$\boldsymbol{b = 7} \rightarrow f(7) = f(3) = 1$ (perquè $7 = 4 + 3$)

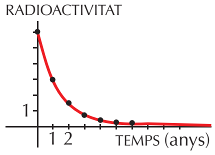
$\boldsymbol{c = 418{,}5} \rightarrow f(418{,}5) = f(2{,}5) = 3$ (perquè $418{,}5 = 4 \cdot 104 + 2{,}5$)

$\boldsymbol{d = 1\,603{,}5} \rightarrow f(1\,603{,}5) = f(3{,}5) = 1{,}5$ (perquè $1\,603{,}5 = 4 \cdot 400 + 3{,}5$)

Els valors $f(1)$, $f(3)$, $f(2{,}5)$ i $f(3{,}5)$, els mirem en la gràfica.

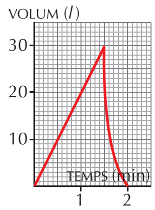
ACTIVITATS

4.17. La quantitat de radioactivitat que té una substància es redueix a la meitat cada any. La gràfica descriu la quantitat de radioactivitat que hi ha en una porció d'aquesta substància en transcórrer el temps.



A quant *tendeix* la quantitat de radioactivitat amb el pas del temps?

4.18. La cisterna d'uns serveis públics s'omple i es buida, automàticament, cada dos minuts, seguint el ritme de la gràfica adjunta.



a) Dibuixa la gràfica corresponent a 10 min.

b) Quanta aigua hi haurà en la cisterna en els instants següents?

I) 17 min II) 40 min 30 s

III) 1 h 9 min 30 s

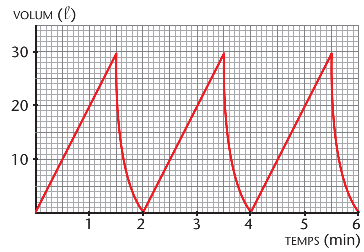
CONEIXEMENTS MÍNIMS

- Saber què és una funció periòdica i a què s'anomena període.
- Saber trobar la tendència d'una funció.

SOLUCIONS

4.17. Amb el pas del temps, la radioactivitat tendeix a zero.

4.18. a)



b) I) $f(17) = 20$ litres

II) $f(40 \text{ min } 30 \text{ s}) = 10$ litres

III) $f(1 \text{ h } 9 \text{ min } 30 \text{ s}) = 30$ litres

Notes

COMPETÈNCIES RELLEVANTS

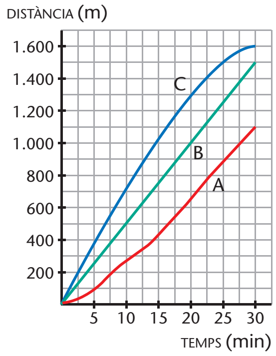
4.19. C1 C2 C6

4.20. C1 C3 C6

4.21. C1 C3 C6

SOLUCIONS

4.20.



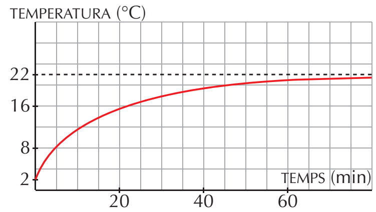
Notes

ACTIVITATS

Practica

Interpretació de gràfiques

4.19. ◆◇◇ Hem tret de la nevera un bol amb aigua i l'hem deixat a fora. Aquesta gràfica mostra la seva temperatura en passar el temps.



a) A quina temperatura està l'interior de la nevera?
b) A quina temperatura està l'habitació?
c) Imagina que traiem del microones un bol amb aigua a 98 °C i el deixem a fora. Dibuixa una gràfica aproximada que mostri la temperatura de l'aigua en aquest segon bol en passar el temps.

Enunciats, fórmules i taules

4.20. ◆◆◇ Tres esportistes neden durant mitja hora. El seu entrenador mesura les distàncies recorregudes cada 5 minuts i obté aquestes dades:

Temps (min)	5	10	15	20	25	30
Distància A (m)	95	235	425	650	875	1.100
Distància B (m)	250	500	750	1.000	1.250	1.500
Distància C (m)	360	710	1.020	1.300	1.490	1.600

a) Dibuixa la gràfica que relaciona la distància i el temps de cada nedador i descriu-la.
b) Hi ha hagut cap avançament durant la mitja hora?
c) Calcula la velocitat mitjana de cada un.
d) Quin és el domini i el recorregut de cada una de les tres funcions?

4.21. ◆◆◇ La intensitat del so d'un focus sonor és menor a mesura que ens n'allunyem i, a més, decreix cada vegada més lentament.
a) Representa la intensitat del so en funció de la distància al focus sonor.
b) Quina és la seva tendència?

Característiques d'una funció

4.22. ◆◇◇ Determina el domini de definició de les funcions següents:

a) $y = \dfrac{1}{x-3}$ **b)** $y = \dfrac{-3x}{2x+10}$

c) $y = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$ **d)** $y = \dfrac{2}{-x}$

e) $y = \dfrac{x-1}{x^2+x-6}$ **f)** $y = \dfrac{1}{x^2-x}$

4.23. ◆◇◇ Determina el domini de definició de les funcions següents:

a) $y = \sqrt{x+7}$ **b)** $y = \sqrt{1-x}$

c) $y = \sqrt{3x-9}$ **d)** $y = \sqrt{-x}$

e) $y = \sqrt[3]{3x-4}$ **f)** $y = 1 - 5\sqrt{2x+2}$

4.24. ◆◆◇ **Activitat resolta**

Indica quin és el domini de definició de la funció:

$$y = \sqrt{3x^2 + 6x - 9}$$

- Hem de trobar els valors de x que fan que $3x^2 + 6x - 9$ sigui positiu i zero.
- Resolem $3x^2 + 6x - 9 = 0 \rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 1$

I II III
−3 1

En I) Si $x < -3,\ 3x^2 + 6x - 9 > 0$
En II) Si $-3 < x < 1,\ 3x^2 + 6x - 9 < 0$
En III) Si $x > 1,\ 3x^2 + 6x - 9 > 0$

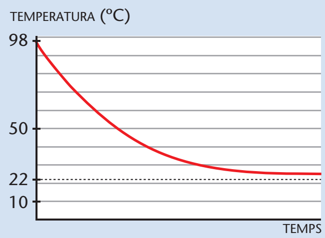
Podem donar a x qualsevol valor més petit que −3 i també qualsevol valor més gran que 1. Com que en $x = -3$ i $x = 1$ la funció $3x^2 + 6x - 9$ val 0, sí que podem fer l'arrel quadrada, per la qual cosa aquests valors també són inclosos.

- *Dom* $y = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

BARCANOVA

SOLUCIONARI DE LES ACTIVITATS

4.19. a) L'interior de la nevera està a 2 °C.
b) L'habitació està a 22 °C.
c)



4.20. a) Vegeu gràfica al marge. / b) No hi ha hagut cap avançament. / c) V_m (A) = 36,67 m/min; V_m (B) = 50 m/min; V_m (C) = 53,3 m/min / d) *Dom* A = *Dom* B = *Dom* C = [0, 30]; *Rec* A = [0, 1.100]; *Rec* B = [0, 1.500]; *Rec* C = [0, 1.600]

4.21. a) Resposta oberta.
b) La tendència de la funció és zero.

4.22. a) $\mathbb{R} - \{3\}$ / b) $\mathbb{R} - \{-5\}$ / c) $\mathbb{R}$ / d) $\mathbb{R} - \{0\}$ / e) $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$ / f) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

4.23. a) $[-7, +\infty)$ b) $(-\infty, 1]$ / c) $[3, +\infty)$ d) $(-\infty, 0]$ / e) $\mathbb{R}$ / f) $[-1, +\infty)$

4.25. a) $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ / b) $(-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$ / c) $\mathbb{R}$ / d) $\{0\}$ / e) $[-2, 2]$ / f) $[-2, 1]$

BARCANOVA

TEMA 4

4.25. ◆◆◇ Troba el domini de definició de les funcions següents:

a) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ b) $y = \sqrt{x^2 + 6x - 7}$

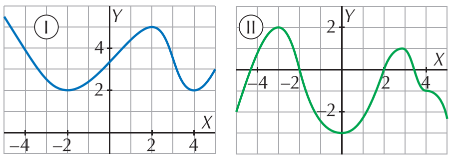
c) $y = \sqrt{x^2}$ d) $y = \sqrt{-x^2}$

e) $y = \sqrt{4 - x^2}$ f) $y = \sqrt{-x^2 - x + 2}$

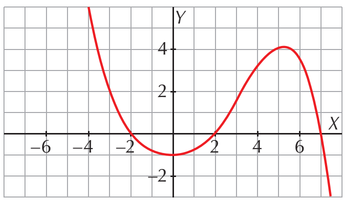
4.26. ◆◇◇ De cada una de les funcions següents indica:

a) en quins intervals creix i en quins decreix;

b) quins són els màxims i els mínims relatius.



4.27. ◆◇◇ Observa aquesta funció:



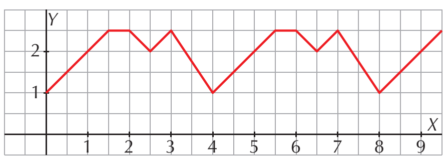
Calcula'n la TVM en els intervals:

[0, 4], [0, 5], [5, 7], [0, 7], [–4, 0] i [–4, –2].

Copia en el quadern la gràfica i dibuixa en cada cas el segment del qual cerques el pendent.

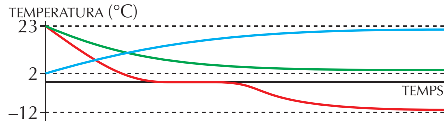
4.28. ◆◇◇ Troba la TVM de $y = 3x^3 + 9x^2 - 3x - 9$ en els intervals [–2, 0], [–1, 0], [–3, –1], [0, 1].

4.29. ◆◆◇ És periòdica aquesta funció? Quin període té?



Esbrina els valors de la funció en els punts d'abscisses $x = 1$, $x = 3$, $x = 20$, $x = 23$ i $x = 42$.

4.30. ◆◇◇ Observa les gràfiques de funcions següents:



a) Relaciona cada corba amb aquests enunciats:

I. Temperatura d'un bol d'aigua quan passa de la taula a la nevera.

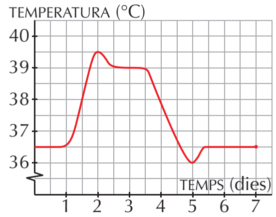
II. Temperatura d'un bol d'aigua quan surt de la nevera i es deixa damunt la taula.

III. Temperatura d'un bol d'aigua quan passa de la taula al congelador.

b) Determina a què tendeix cada una quan creix la variable independent.

Resol problemes

R **4.31.** ◆◇◇ Aquesta és la gràfica de l'evolució de la temperatura d'un malalt:



a) Quant temps va estar en observació?

b) Quin dia la temperatura arriba a un màxim? I a un mínim?

c) En quins intervals de temps creix la temperatura i en quins decreix?

d) Quina tendència té la temperatura?

e) Elabora un breu informe interpretant els resultats.

4.32. ◆◆◇ Quan una persona sana pren 50 g de glucosa en dejú, la seva glucèmia (% de glucosa en la sang) s'eleva, en una hora aproximadament, des de 90 mg/dl, que és el nivell normal, fins a 120 mg/dl. Després, en les 3 hores següents, disminueix fins a valors una mica inferiors al nivell normal, i torna a la normalitat al cap de 5 hores.

a) Representa la corba de glucèmia d'una persona sana.

b) Indica quin n'és el màxim i el mínim, i explica'n la tendència.

COMPETÈNCIES RELLEVANTS

4.26. C1 C3 C5

4.27. C1 C3 C5

4.28. C1 C3 C5

4.29. C1 C3 C5

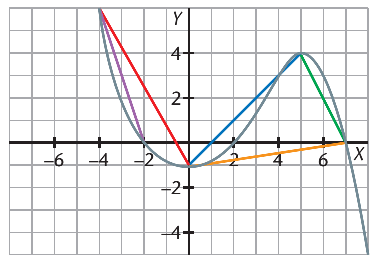
4.30. C1 C4 C6

4.31 RÚBRICA C1 C2 C4 C6 C8

4.32. C1 C2 C6

SOLUCIONS

4.27.



Notes

SOLUCIONARI DE LES ACTIVITATS

4.26. a) (I) creix en (–2, 2) ∪ (4, +∞) i decreix en (–∞, –2) ∪ (2, 4).
(II) creix en (–∞, –3) ∪ (0, 3) i decreix en (–3, 0) ∪ (3, 4) ∪ ∪ (4, +∞).
b) (I) Mínims: (–2, 2) i (4, 2); Màxim: (2, 5); (II) Mínim: (0, –3); Màxims: (–3, 2) i (3, 1)

4.27. TVM [0, 4] = 1; TVM [0, 5] = 1; TVM [5, 7] = –2; TVM [0, 7] = 1/7; TVM [–4, 0] = –7/4; TVM [–4, –2] = –3
(Vegeu gràfica al marge).

4.28. TVM [–2, 0] = –94; TVM [–1, 0] = –9; TVM [–3, –1] = 0; TVM [0, 1] = 9

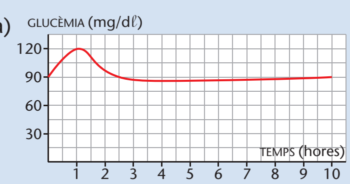
4.29. Periòdica de període 4.
$f(1) = 2$; $f(3) = 2{,}5$ $f(20) = 1$; $f(23) = 2{,}5$; $f(42) = 2{,}5$

4.30. a) I-verda, II-blava, III-vermella.

b) I-verda tendeix a 2 °C, II-blava tendeix a 23 °C, III-vermella tendeix a – 12 °C.

4.31. a) 7 dies. / b) Màxim: segon dia. Mínim: cinquè dia. /
c) Creix en (1, 2) ∪ (5; 5,5). Decreix en (2; 2,5) ∪ (3,5; 5). /
d) Tendeix a estabilitzar-se en 36,5 °C. / e) Durant el primer dia, la temperatura es manté constant en 36,5 °C. Al llarg del segon dia puja fins a 39,5 °C. El tercer dia baixa fins a 39 °C, i roman així fins al quart dia. A partir d'aquí baixa gradualment i al final del cinquè dia se situa en 36 °C. El sisè dia puja mig grau i la temperatura s'estabilitza en 36,5 °C fins al final del setè dia.

4.32. a)



b) Màxim: 120 mg/dl.
Mínim: 90 mg/dl.
Tendeix a estabilitzar-se en 90 mg/dl.

COMPETÈNCIES RELLEVANTS

4.33. C1 C3 C5 C7
4.34. C1 C2 C6
4.35. C1 C2 C3 C10
4.36. C1 C2 C5 C6
4.37. C1 C3 C7
4.38. C1 C3 C5 C10
4.39. C1 C2 C10

Notes

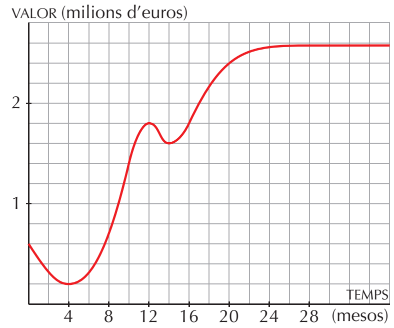
4.33. ◆◇◇ Considera un triangle isòsceles de 20 cm de perímetre. Anomena x el costat desigual i y els costats iguals.

a) Fes una taula de valors i, a partir d'aquesta, escriu la funció que ens dóna el valor de y depenent de x.

b) Quin domini de definició té?

c) Escriu la funció que ens dóna el valor de x depenent de y.

4.34. ◆◇◇ La gràfica adjunta descriu el valor d'una empresa des que va obrir.



Respon:

a) Quin era el valor de l'empresa en el moment de l'obertura?

b) A quant es va reduir després de 4 mesos?

c) Quina és la TVM en l'interval [4, 12]? Dóna el resultat en milers d'euros per mes.

d) Quina és la TVM en [12, 14] i en [14, 20]?

e) Aquesta funció té un màxim i dos mínims relatius. Descriu-los.

f) Quina sembla la tendència d'aquesta funció per als pròxims mesos?

g) Fes una descripció global del valor d'aquesta empresa en els seus tres primers anys.

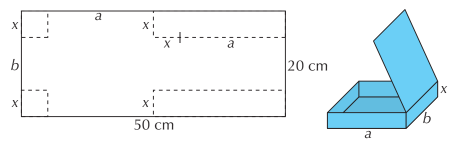
4.35. ◆◆◇ L'expressió analítica d'una funció és aquesta:

$$y = ax^3 + bx^2 + c$$

Si sabem que els punts $A(0, -2)$, $B(1, 5)$ i $C(-2, -22)$ pertanyen a la gràfica, quins seran els valors de a, b i c?

Problemes

4.36. ◆◆◇ Amb un rectangle de cartolina de 50 cm × 20 cm, fabriquem una capsa amb tapadora.

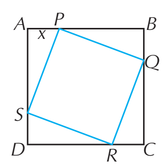


a) Obtén l'expressió del seu volum. Tingues en compte que $V = a \cdot b \cdot x$ i observa que $2a + 2x = 50$ i que $b + 2x = 20$.

b) Donant valors a x, representa la gràfica de la funció $V(x)$.

c) Quin és el domini de $V(x)$?

4.37. ◆◇◇ Dibuixa un quadrat *ABCD* de 7 cm de costat. Sobre el costat *AB*, marca un punt *P* que disti *x* de *A*, i dibuixa un nou quadrat *PQRS* inscrit en l'anterior.



a) Observa que si fem $x = 3$ cm, aleshores $\overline{AS} = 7 - 3 = 4$ cm. Quant mesura $\overline{PS}$?

Quina és l'àrea del nou quadrat?

b) Construeix la gràfica que relacioni x (amb valors de 0 a 7) amb l'àrea del quadrat inscrit.

4.38. ◆◆◆ El vèrtex d'una paràbola és el punt en què se n'aconsegueix el màxim o el mínim.

a) Si sabem que, en una paràbola, la TVM en l'interval [4, 12] és 0, en quina abscissa té el vèrtex?

b) Si sabem que la paràbola passa pel punt (4, 0) i que el coeficient de x^2 és 1, quina és l'ordenada del vèrtex?

c) Amb les condicions de l'apartat anterior, sabries escriure la seva equació?

4.39. ◆◆◆ Una funció periòdica, $f(x)$, té de període 5, i la TVM en [1, 3] és 1.

a) Què podem dir de la taxa de variació mitjana de la funció en l'interval [6, 8]?

b) I en l'interval [11, 13]?

c) Quina TVM té la funció en [3, 6]?

SOLUCIONARI DE LES ACTIVITATS

4.33. a)

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18
y	9	8	7	6	5	4	3	2	1

$y = 10 - x/2$

b) *Dom* $y = (0, 20)$ / c) $x = 20 - 2y$

4.34. a) 600.000 € / b) 200.000 € / c) 200.000 €/mes / d) TVM [12, 14] = 100.000 €/mes; TVM [14, 20] = 133.333 €/mes / e) Màxim: (12, 1.800.000); Mínims: (4, 200.000) i (14, 1.600.000) / f) El valor de l'empresa tendeix a 2.600.000 €. / g) En els quatre primers mesos el valor de l'empresa cau. En els vuit següents creix ràpidament i té una lleugera caiguda en els dos següents. A partir del 14è mes, creix ràpidament durant 6 mesos més i després, cada vegada més lentament. El seu preu s'aproxima a 2.600.000 €.

4.35. $a = 4$; $b = 3$; $c = -2$

4.36. a) $V(x) = 2x^3 - 70x^2 + 500x$

b)

x	0	1	2	3	4	5
V	0	432	736	924	1.008	1.000

x	6	7	8	9	10
V	912	756	544	288	0

c) *Dom* $(V(x)) = (0, 10)$

4.37. a) $\overline{PS} = 5$ cm; $A = 25$ cm²

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
A	49	37	29	25	25	29	37	49

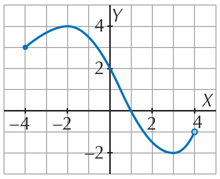
4.38. a) El vèrtex x es troba en el punt d'abscissa $x = 8$. / b) El vèrtex és (8, – 16). / c) $y = x^2 - 16x + 48$

4.39. a) TVM [6, 8] = 1 / b) TVM [11, 13] = 1 / c) TVM [3, 6] = –2/3

Reflexiona sobre la teoria

4.40. ◆◆◇ Calcula el valor de a, b i c perquè els punts $A(-12, a)$, $B(3/4, b)$ i $C(0, c)$ pertanyin a la gràfica de la funció $y = 3x^2 - x + 3$.

4.41. ◆◇◇ Observa la gràfica de la funció i respon:



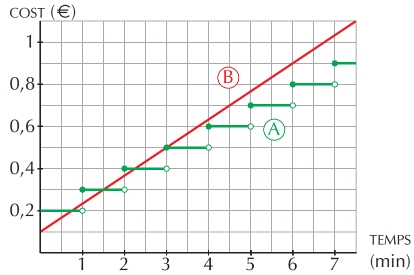
a) Quins són el domini de definició i el recorregut?
b) Té màxim i mínim relatius? En cas afirmatiu, quins són?
c) Quins són els punts de tall amb els eixos?
d) En quins intervals és la funció creixent i en quins és decreixent?

4.42. ◆◆◇ **a)** Calcula la TVM de la funció $y = 2x - 3$ en els intervals $[0, 1]$, $[5, 6]$, $[1, 5]$ i $[0, 7]$.
b) Observa que en tots els intervals el valor obtingut és igual. Amb quin element característic de la recta coincideix aquest valor?
c) Generalitza completant la frase:
«En les funcions lineals, la TVM en qualsevol interval és igual a ...».

4.43. ◆◆◇ Digues, raonadament, si les frases següents són certes o falses:
a) Si una funció és discontínua en un punt, aquest punt no pertany al domini de definició.
b) Si un punt no pertany al domini de definició d'una funció, aquesta no pot ser contínua en aquest punt.
c) Una funció periòdica podem assegurar que és sempre contínua.
d) El pendent d'una recta és la TVM de qualsevol interval d'aquesta.

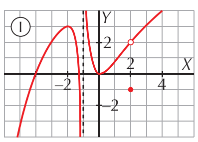
4.44. ◆◆◇ Dibuixa una funció periòdica de període 5 amb un màxim relatiu en $x = 3$ i amb un mínim relatiu en $x = 6$.

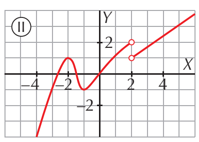
R 4.45. ◆◇◇ Dues companyies telefòniques, A i B, tenen tarifes diferents. Observa'n les gràfiques:

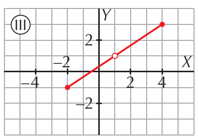


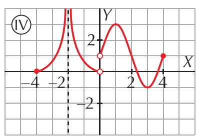
a) Determina quant val una telefonada de 3 minuts amb cada una de les dues companyies.
b) I una telefonada de mitja hora?
c) Digues si cada una d'aquestes funcions és contínua. Escriu-ne els punts de discontinuïtat, si és que n'hi ha.
d) Troba la TVM de la funció A en $[1, 2]$. Compara-la amb el pendent de la recta de la funció B.
e) Raona per què triaries una companyia o una altra per a casa teva.

4.46. ◆◆◆ Les quatre gràfiques següents corresponen a funcions discontínues. Per a cada una d'elles, digues:
a) Quins són els punts de discontinuïtat. Explica la raó de la discontinuïtat en cada punt.
b) Quin és el domini de definició.
c) Indica si té màxims i mínims relatius i digues quins són.
d) En quins intervals és creixent i en quins és decreixent.









COMPETÈNCIES RELLEVANTS

4.40. C1 C3 C5
4.42. C1 C5 C10
4.43. C1 C5 C10
4.45 RÚBRICA C1 C2 C3 C4 C5 C6
4.46. C1 C2 C4 C5

Notes

SOLUCIONARI DE LES ACTIVITATS

4.40. $a = 447$; $b = 63/16$; $c = 3$

4.41. a) $Dom = [-4, 4]$. Recorregut $= [-2, 4]$ /
b) Màxim: $(-2, 4)$. Mínim: $(-3, -2)$. / c) $(0, 2)$ i $(1, 0)$ /
d) Creix en $(-4, -2) \cup (3, 4)$. Decreix en $(-2, 3)$.

4.42. a) És 2 en tots els casos. / b) Amb el pendent / c) ...al seu pendent.

4.43. a) F / b) V / c) F / d) V

4.44. Resposta gràfica.

4.45. a) 0,50 € amb A i amb B. / b) Amb A, 3,20 €. Amb B, 4,10 €. /
c) B és contínua. A és discontínua en tots els punts d'abscissa entera, 1, 2, 3, ... / d) TVM de A en $[1, 2] = 0{,}1$; Pendent de B $= 2/15$ /
e) Si habitualment fes telefonades curtes, triaria B. Si fes telefonades llargues ben sovint, triaria A.

4.46. a) (I) $x = -1$ (branques infinites) i $x = 2$ (punt desplaçat).
(II) $x = 2$ (no definida i un salt).
(III) $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ (no definida) i $x = 1$ (no definida).
(IV) $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ (no definida), $x = -2$ (branques infinites) i $x = 0$ (no definida i salt).
b) Dom ((I)) $= (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$; Dom ((II)) $= (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
Dom ((III)) $= [-2, 1) \cup (1, 4]$; Dom ((IV)) $= [-4, 2) \cup (2, 0) \cup (0, 4]$
c) (I) Màxim: $(-2, 3)$. Mínim: $(0, 0)$. (II) Màxim: $(-2, 1)$. Mínim: $(-1, -1)$.
(III) No té màxims ni mínims relatius. (IV) Màxim: $(1, 3)$. Mínim: $(3, -1)$.
d) (I) Creix en $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$. Decreix en $(-2, -1) \cup (1, 0)$.
(II) Creix en $(-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$. Decreix en $(-2, -1)$.
(III) Creix en $(-2, 1) \cup (1, 4)$. No decreix.
(IV) Creix en $(-4, -2) \cup (0, 1) \cup (3, 4)$. Decreix en $(-2, 0) \cup (1, 3)$.

MATSAPP

En aquest apartat es proposen activitats competencials més contextualitzades perquè l'alumnat prengui consciència de la utilitat de les matemàtiques en qualsevol àmbit, especialment en els més quotidians.

COMPETÈNCIES RELLEVANTS

1. C1 C3 C4 C6 C10

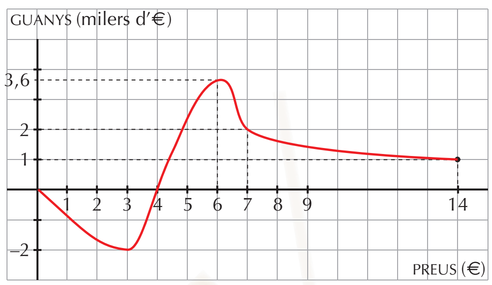
Notes

MATSAPP
MATEMÀTICA APLICADA

1. Oliva fresca al molí fa l'oli fi

La família Vilalta, pagesos amb una llarga experiència en el cultiu d'oliveres i la fabricació d'oli, va llançar al mercat un oli d'oliva verge extra de gran qualitat. Durant els anys que l'han estat comercialitzant, han anat estudiant el seu nivell de rendibilitat, analitzant la relació entre els guanys que han obtingut venent-lo, *G*, (en milers d'euros) i el preu de venda que posaven a cada ampolla, *P*, (en euros). Ara han parat la producció d'aquest oli per dedicar-se a produir-ne un altre, destinat especialment al mercat americà.

El resultat de l'anàlisi de rentabilitat de l'oli d'oliva verge extra queda reflectit en la gràfica següent:



a) A quin preu màxim va comercialitzar-se l'ampolla d'oli? Ha estat rendible venent-lo a qualsevol preu?
b) Pots estimar què hauria passat si no se n'hagués interromput la producció?
c) Entre quins valors de *P* va descendir la rentabilitat? Entre quins va ascendir?
d) Per a quins valors de *P* van aconseguir-se els guanys mínims? Quins van ser, i a quin preu venien l'ampolla aleshores?
e) Per a quins valors de *P* van aconseguir-se els guanys màxims? Quins van ser, i a quin preu venien l'ampolla aleshores?
f) Com varien els guanys en els intervals [3, 4] i [4, 6], segons varia el preu de l'ampolla? I en els intervals [6, 7] i [7, 14]?

100

SOLUCIONARI MATSAPP

1. Oliva fresca al molí fa l'oli fi

a) 14 €. No, no ha estat rendible.
b) Els guanys, que han anat disminuint, s'haurien estabilitzat al voltant de 1.000 €, o poc menys.
c) Entre 0 i 3 €, i entre 6 i 14 €, va descendir. Va ascendir entre 3 i 6 €.
d) *P* = 3. Pèrdua de 2.000 € (–2.000 € de guanys). Venien l'ampolla a 3 €.
e) P = 6. Guanys de 3.600 €. Venien l'ampolla a 6 €.
f) [3,4]: augmenten 2.000 €; [4,6]: augmenten 3.600 €.
[6,7]: disminueixen 1.600 €; [7,14]: disminueixen 1.000 €.

Al trull de la família Vilalta, allà on fan l'oli, el suc de les olives que surt directament de la premsa (que anomenen oli de primeres) s'emmagatzema en un dipòsit.

El volum d'oli en el dipòsit, V, depèn del temps, t, en què estigui oberta una aixeta per la qual l'oli se'n va cap a un altre dipòsit, segons l'expressió analítica següent:

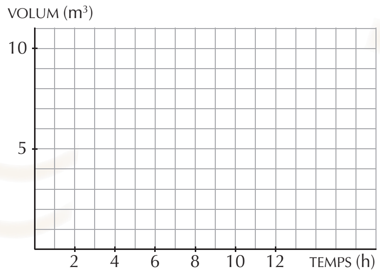
$$V = 5\left(1 + \frac{1}{t+1}\right)$$

on t ve donat en hores, i V, en metres cúbics.

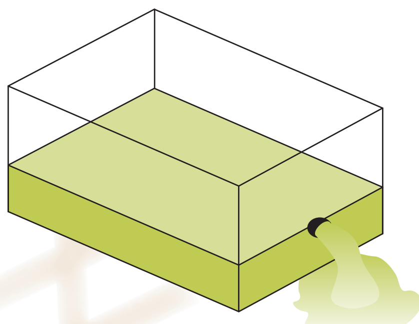
g) Quina és la capacitat del dipòsit d'oli de primeres?

h) Per al nivell de producció habitual de l'oli d'oliva verge extra, es necessiten uns 200 litres d'oli de primeres al dia. Quants dies podrien produir oli amb només 1 dipòsit ple de oli de primeres?

i) Suposant que l'aixeta que comunica el primer dipòsit amb el segon està oberta, completa una taula de valors on es relacioni V amb t (pren $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$). Construeix en el teu quadern una gràfica amb les dades que obtinguis, fent-hi una quadrícula similar a la següent:



j) Si l'aixeta, per error, es quedés oberta indefinidament, es buidaria tot el dipòsit? Per esbrinar-ho, considera $t = 100$, $t = 1.000$ i $t = 10.000$. Què observes?



k) El dipòsit té forma d'ortoedre, i la seva base és un rectangle de 10 m² de superfície. Segons això, podríem saber a quina altura sobre la base es troba l'aixeta? Escriu-la en cas afirmatiu.

Pensa una altra pregunta per plantejar-la a un company o companya de la classe. Primer l'has de resoldre tu per comprovar que està ben plantejada i per saber quina és la solució correcta.

Notes

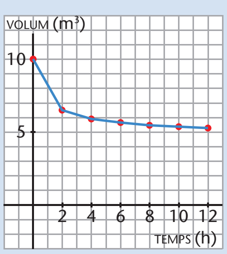
SOLUCIONARI MATSAPP

g) A $t = 0 \rightarrow V = 5\left(1 + \frac{1}{t+1}\right) = 5\left(1 + \frac{1}{0+1}\right) = 10$ m³

h) 10 m³ del dipòsit ple = 10.000 $\ell \rightarrow \frac{10.000\ \ell}{200\ \ell/\text{dia}} = 50$ dies

i)

t (h)	0	2	4	6	8	10	12
V (m³)	10	6,6	6	5,7	5,55	5,45	5,4



j) t = 100 → V = 5(1 + 1/101) = 5,0495 m³

t = 1.000 → V = 5(1 + 1/1001) = 5,004995... m³

t = 10.000 → V = 5(1 + 1/10001) = 5,00049995... m³

No es buidaria tot el dipòsit. En anar passant el temps, els valors s'estabilitzen i tendeixen a 5 m³.

k) Si el volum tendeix a 5 m³, podem calcular a quina altura (h) queda l'oli i, per tant, a quina altura està l'aixeta.

$h = \frac{V}{A_{BASE}} = \frac{5\ \text{m}^3}{10\ \text{m}^2} = 0{,}5$. Està a 50 cm sobre la base.

Notes

Organitza els teus coneixements

FUNCIONS

Una **funció** $y = f(x)$ associa cada valor de la **variable independent** x a un únic valor de la **variable dependent** y

CARACTERÍSTIQUES

- el seu **domini de definició**, ***Dom f***, és el conjunt de valors de x per als quals hi ha funció; pot quedar restringit per:
  - la impossibilitat de fer alguna operació (denominador = 0, arrel quadrada d'un nombre negatiu...)
  - el context real del qual s'ha tret la funció
  - la voluntat de qui proposa la funció
- el seu **recorregut** és el conjunt de valors de y per als quals hi ha un x tal que $f(x) = y$
- pot representar-se sobre un pla amb eixos cartesians escalats, definint-se cada punt per dues **coordenades**: l'**abcissa** x i l'**ordenada** y
- pot venir donada per: **gràfica**, **taula de valors**, **fórmula** o **enunciat**
- pot ser **contínua** en un interval o no ser-ho en presentar **discontinuïtats** (salts, branques infinites, falta d'algun punt)
- serà **creixent** en un tram si $x_1 < x_2$ i $f(x_1) < f(x_2)$
- serà **decreixent** en un tram si $x_1 < x_2$ i $f(x_1) > f(x_2)$
- tindrà un **màxim relatiu** en un punt quan hi prengui un valor més gran que en els punts pròxims
- tindrà un **mínim relatiu** en un punt quan hi prengui un valor més petit que en els punts pròxims
- pot mesurar-se el seu augment o disminució en un interval utilitzant la **taxa de variació mitjana** (TVM)

$$\text{TVM de } f \text{ en } [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- quan té una **tendència** clara en un interval, sovint podrem predir com es comportarà lluny d'ell
- quan és **periòdica**, el seu comportament es repeteix cada cop que la seva x recorre un interval; la longitud d'aquest interval s'anomena **període**

BARCANOVA

102

Organitza els teus coneixements

En aquesta pàgina, a tall de recapitulació, es proporciona a l'alumnat un esquema que recull els conceptes bàsics que s'han treballat al llarg del tema. Els servirà per situar d'una manera organitzada els coneixements que han adquirit.

BARCANOVA

I per acabar...

Llegeix i informa't

Un dels grans

Leonhard **Euler** va néixer a la ciutat suïssa de Basilea, l'any 1707 i va morir a Sant Petersburg, el 1783. Se'l considera un dels pilars de les matemàtiques, juntament amb Gauss, Newton, Arquimedes… i pocs més.

Va ser, sens dubte, un dels científics més prolífics i polifacètics de la història, com demostren els seus treballs en física, arquitectura, enginyeria, astronomia… i, especialment, en matemàtiques.

Va contribuir al desenvolupament del llenguatge matemàtic, aportant notacions que es continuen usant en l'actualitat i que van facilitar el desenvolupament de camps que fins aleshores gairebé no havien estat iniciats. A ell es deu, per exemple, la notació $y = f(x)$ per a les funcions.

Va assentar les bases de l'anàlisi matemàtica i va potenciar el càlcul infinitesimal i el càlcul diferencial. Va resoldre problemes interessants i va plantejar-ne d'altres de nous que encara continuen donant maldecaps, com el dels encreuaments de camins (una funció encara desconeguda), que pots veure a continuació.

Una funció encara desconeguda

Pensa que en un camp hi ha diverses cases i que totes estan unides per camins independents.

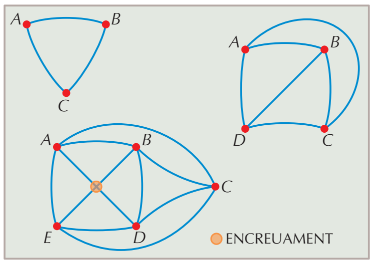
La funció que determina el nombre d'encreuaments d'aquests camins, depenent del nombre de cases, és encara una funció desconeguda.

Tres punts es poden unir per camins que no s'encreuen $f(3) = 0$.

I el mateix ocorre amb quatre punts $f(4) = 0$.

Cinc punts no es poden unir sense que hi hagi almenys un encreuament $f(5) = 1$.

Se sospita que $f(6) = 3$. No se sap res de $f(7)$, $f(8)$, etc.



Cerca regularitats i generalitza

Troba la relació de dependència i escriu l'equació de la funció en cada cas:

x	$f(x)$
1	3
2	5
3	7
5	11
10	21

x	$g(x)$
1	2
2	5
3	8
5	14
10	29

x	$h(x)$
1	2
2	5
3	10
5	26
10	101

x	$t(x)$
1	4
2	10
3	18
5	40
10	130

AJUDA: Per resoldre la darrera, relaciona $t(x)$ amb $g(x)$ i $h(x)$.

SOLUCIONS

Cerca regularitats i generalitza

$f(x) = x + 1$

$g(x) = 3x - 1$

$h(x) = x^2 + 1$

$t(x) = x^2 + 3x$

Notes

I per acabar...

Cada tema ofereix textos amb informació curiosa i activitats lúdiques. En definitiva, una manera de jugar amb les matemàtiques.

INTEL·LIGÈNCIES MÚLTIPLES

TEMA 4

INTEL·LIGÈNCIES	TASQUES	ACTIVITATS
LOGICOMATEMÀTICA	Activitats de comparar, ordenar, relacionar, operar amb nombres.	**4.1, 4.6** a **4.9, 4.11** a **4.13, 4.22, 4.23, 4.25** a **4.30, 4.35, 4.40** a **4.43**
	Resolució de problemes.	**4.31, 4.32, 4.36** a **4.39**
LINGÜÍSTICA	Treball de l'expressió oral i escrita.	**4.1, 4.10**
	Descripcions.	**4.34 e) g)**
NATURALISTA	Reconeixement de relacions: classificar, categoritzar, comparar…	**4.3, 4.4, 4.12**
ESPACIOVISUAL	Activitats que requereixin orientació espacial.	**4.1, 4.2, 4.11, 4.13** a **4.20, 4.26, 4.27, 4.29, 4.30, 4.34, 4.45, 4.46**
	Representació de situacions de manera visual.	**4.18 a), 4.20 a), 4.19 c), 4.21, 4.44**

Notes...

PROJECTE 1

Per acabar aquest trimestre proposem uns seguit de problemes que l'alumne haurà de resoldre aplicant els coneixements i les estratègies matemàtiques apreses en els temes **1**, **2**, **3** i **4** del llibre.

Es tracta d'una proposta d'activitats que globalitza els coneixements adquirits i els posa en un context d'aplicació a la vida quotidiana.

Aquest mateix Projecte 1 el trobareu en el llibre digital per treballar-lo fent servir recursos 3.0 per adquirir les competències digitals. També el podreu trobar al web www.espaibarcanova.cat.

Notes

PROJECTE 1

Al museu de la ciència

Un centre d'estudis ha organizat una visita al museu de la ciència per als estudiants de 4t curs.

En la multitud de sales del museu, tot jugant i investigant, s'aprenen temes relacionats amb les diverses branques de la ciència.

Hi ha la sala de l'Univers, la dels microscopis, la del volum, i moltes altres.

1. Algunes dades sobre el museu són exposades en un tauler a l'entrada:

DADES DEL MUSEU

Nombre d'assistents durant tot l'any passat: 28.465.376 persones
Superfície dedicada a l'exposició: 63.582 m^2
Diners invertits en les instal·lacions: 82.321.817 €
Temps dedicat a la construcció i el muntatge de les activitats: 24.353 hores

Expressa cada quantitat d'aquest cartell amb el nombre de xifres significatives que et sembli raonable.

Dóna una fita de l'error absolut i una altra de l'error relatiu comès en cada valoració de les quantitats que has aproximat.

2. Expressa en notació científica les quantitats arrodonides de l'activitat anterior.

3. A la sala de l'Univers ens hem trobat el sistema solar representat a escala 1:100.000.000.000. En aquesta representació, Neptú es troba a 45 m del Sol, que és al centre de la sala.

Els altres planetes estan en la maqueta a aquestes distàncies del Sol:

Mercuri: 0,57 m Venus: 1,08 m Terra: 1,50 m Mart: 2,28 m
Júpiter: 7,79 m Saturn: 14,33 m Urà: 28,77 m

a) Suposant que la maqueta estigui efectivament muntada d'acord a l'escala que indica, calcula la distància a la qual es troba cada planeta del Sol en la realitat.

b) Investiga a internet la distància mitjana real de cada planeta al Sol i indica l'error absolut i relatiu que s'ha comès.

c) La Unitat Astronòmica (UA) és la distància que hi ha de la Terra al Sol i equival a $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m. Indica la distància de cada planeta al Sol mesurada en unitats astronòmiques.

104

SOLUCIONARI PROJECTE 1

1.

	Valoració	Error absolut	Error relatiu
28.465.376 persones	28.500.000	< 50.000	< 0,002
63.582 m^2	63.600	< 500	< 0,01
82.321.817 eur	82.000.000	< 500.000	< 0,01
24.353 h	24.000	< 500	< 0,03

2. $2{,}85 \cdot 10^7$ / $6{,}36 \cdot 10^4$ / $8{,}2 \cdot 10^7$ / $2{,}4 \cdot 10^4$

3. a) Segons l'escala indicada, les distàncies haurien de ser les següents:

Mercuri: 57.000.000 m Venus: 108.000.000 m
Terra: 150.000.000 m Mart: 228.000.000 m
Júpiter: 779.000.000 m Saturn: 1.433.000.000 m
Urà: 2.877.000.000 m Neptú: 4.500.000.000 m

b) Distàncies al Sol (semieixos majors, en m), extretes d'internet:

Mercuri: 57.909.100.000 m Venus: 108.208.930.000 m
Terra: 149.598.261.000 m Mart: 227.939.100.000 m
Júpiter: 778.547.200.000 m Saturn: 1.433.449.370.000 m
Urà: 2.876.679.082.000 m Neptú: 4.503.443.661.000 m

Errors absoluts:

Mercuri < 910.000.000 Venus < 209.000.000
Terra < 402.000.000 Mart < 61.000.000
Júpiter < 453.000.000 Saturn < 450.000.000
Urà < 321.000.000 Neptú < 3.444.000.000

Errors relatius:

Mercuri < 0,02 Venus < 0,002 Terra < 0,003
Mart < 0,0003 Júpiter <0,0006 Saturn <0,0004
Urà <0,0002 Neptú < 0,0008

c) Distàncies al Sol en UA:

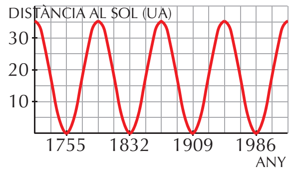
Mercuri: 0,39 UA Venus: 0,72 UA Terra:1,00 UA
Mart: 1,52 UA Júpiter: 5,19 UA Saturn: 9,56 UA
Urà:19,18 UA Neptú: 30,02 UA

4. Els diàmetres (en km) dels planetes i del Sol són en aquesta llista:

Sol: $1{,}39 \cdot 10^6$ Mercuri: $4{,}88 \cdot 10^3$ Venus: $1{,}21 \cdot 10^4$ Terra: $1{,}28 \cdot 10^4$ Mart: $6{,}79 \cdot 10^3$
Júpiter: $1{,}43 \cdot 10^5$ Saturn: $1{,}09 \cdot 10^5$ Urà: $5{,}11 \cdot 10^4$ Neptú: $4{,}95 \cdot 10^4$

Sabent que són a la mateixa escala, indica els centímetres que fa el diàmetre de cada planeta en la maqueta esmentada en l'activitat anterior.

5. A la sala de l'Univers també hem vist una gràfica que indica l'acostament o l'allunyament al Sol del cometa Halley al llarg dels anys.



a) Quant fa que va passar per última vegada?
b) Cada quants anys repeteix el seu cicle?
c) Quan tornarà a estar a distància mínima del Sol?
d) A quina distància màxima, en quilòmetres, s'allunya del Sol?
e) El cometa West té un període orbital de 558.306 anys i les seves distàncies màxima i mínima al Sol són, respectivament, 13.560 UA i 0,58 UA. Representa sobre uns eixos la gràfica *distància al sol-temps* d'aquest cometa des de fa 3 milions d'anys.

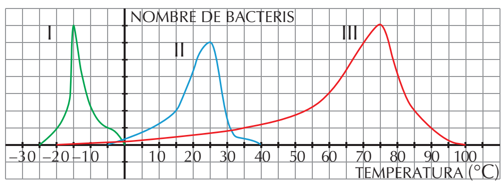
6. Entrem a la sala dels microscopis per veure cultius de diferents tipus de bacteris. N'hi ha de diverses formes i mides, como ara els *cocs*, els *bacils*, els *vibrions*, els *espirils*...

La longitud mitjana d'un bacteri és de 2 µm, que correspon a $2 \cdot 10^{-6}$ m.

Es calcula que al món hi ha aproximadament $5 \cdot 10^{30}$ bacteris. Si es col·loquessin l'un rere l'altre, quants quilòmetres faria la filera que formarien?

7. S'ha experimentat amb tres tipus de bacteris diferents variant la temperatura ambient.

- Els del tipus A són extremament forts: poden aguantar qualsevol temperatura entre –20 ºC i 100 ºC.
- Els del tipus B es reprodueixen sobretot a –15 ºC.
- Els bacteris del tipus C no aguanten temperatures menors de –10 ºC ni superiors a 40 ºC.



a) Indica quina corba correspon a cada tipus de bacteri.
b) Descriu com evoluciona cada cultiu depenent de la temperatura.
c) A quin rang de temperatura podrien conviure els bacteris del tipus B amb els del tipus C?

8. En una sala dedicada als animals hi ha tres cubs que representen els volums de tres animals: el d'una rata, de 2,6 cm d'aresta; el d'una cabra, de 3,8 dm d'aresta, i el d'un elefant, de 1,8 m d'aresta.

Es pretén estudiar la relació entre la superfície i el volum dels mamífers per investigar quanta energia perden per la pell per irradiació de calor.

a) Calcula les superfícies, en dm^2, i els volums, en dm^3, dels tres cubs.
b) Troba la relació entre superfície i volum de cada un.
c) Expressa les relacions anteriors amb dues xifres significatives.
d) Anomena c l'aresta d'un cub. Expressa amb una fracció la relació entre la superfície i el volum. A quant tendeix aquesta relació quan augmenta la longitud de l'aresta?

Notes

SOLUCIONARI PROJECTE 1

4. Diàmetres dels planetes i el Sol a la maqueta:

Sol: 1,39 cm
Mercuri: 0,00488 cm
Venus: 0,0121 cm
Terra: 0,0128 cm
Mart: 0,00679 cm
Júpiter: 0,143 cm
Saturn: 0,109 cm
Urà: 0,0511 cm
Neptú: 0,0495 cm

Compte: les reproduccions dels planetes a la mateixa escala que les seves distàncies al Sol, tal com diu l'enunciat, els farien molt difícils de veure a simple vista.

5. a) 40 anys (= 2016 – 1986). / b) 77 anys. / c) L'any 2063. /

d) $35 \text{ UA} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11} = 52{,}5 \cdot 10^{11}$ m $= 52{,}5 \cdot 10^8$ km /

e) Resolució gràfica, mostrant 5 períodes sencers d'una funció com la de l'enunciat, amb Anys $\cdot 10^5$ en abcisses i UA $\cdot 10^3$ en ordenades, per exemple.

6. 10^{22} km (deu mil milions de bilions de quilòmetres!)

7. a) A-III, B-I, C-II

b) Els del tipus A poden viure entre –20 °C i 100 °C, i es reprodueixen sobretot a 75 °C.
Els del tipus B poden viure entre –25 °C i 0 °C, i es reprodueixen sobretot a –15 °C.
Els del tipus C poden viure entre –5 °C i 40 °C (encara que per sobre dels 30 °C es mora la majoria), i es reprodueixen sobretot a 25 °C.

c) Entre els –10 °C i els 0°C.

8. a)

	Superfície (dm^2)	Volum (dm^3)
Rata	0,0676	0,017576
Cabra	14,44	54,872
Elefant	324	5832

b) Rata: 3,84615385 / Cabra: 0,26315789 / Elefant: 0,05555556

c) Rata: 3,85 / Cabra: 0,26 / Elefant: 0,056

d) c^2/c^3 / Tendeix a zero.